LA PENTE EN TOPOGRAPHIE,

Christophe PREVOT, Initiateur fédéral

Tous les cadres ont suivi, durant leurs cursus de formation, des « cours » de topographie, mais malheureusement la notion de pente a toujours été très floue dans l'esprit de beaucoup (y compris celui des formateurs...). En effet, les ouvrages de référence qui traitent de topographie souterraine (*Techniques de la Spéléologie Alpine* de 1973 et de 1986, *Dossiers Instructions de topographie* de 1982 et de 1998) sont peu clairs, voire erronés, à ce sujet. Cet article tente d'établir le plus clairement possible les choses sans aller trop loin dans les compétences mathématiques prérequises.

1. Définition de la notion de pente

La pente est « *l'obliquité par rapport au plan de l'horizon* » (*Le Trésor de la Langue Française informatisé*). En géomorphologie elle est même définie plus précisément comme étant la « ***tangente trigonométrique (exprimée par une fraction ou en pourcentage) de l'angle formé avec le plan horizontal*** » (*Le Trésor de la Langue Française informatisé*). En mathématiques il s'agit, pour une droite affine $y = ax + b$, de son coefficient directeur a, qui correspond à la tangente de l'angle formé avec l'axe « horizontal » des abscisses.

Cette définition étant posée, **la valeur absolue d'une pente moyenne P de terrain s'obtient en calculant le quotient de la dénivellation (différence d'altitude) par la distance à l'horizontale** (ces deux distances devant être exprimées avec la même unité de mesure).

Il est ainsi aisé de calculer la pente moyenne entre deux points d'après une carte, en divisant la différence d'altitude des deux points par leur distance horizontale (obtenue en mesurant en ligne droite la distance entre les deux points sur la carte et en la divisant par l'échelle de la carte).

Par habitude cette pente P est exprimé en pourcentage, ceci se faisant en multipliant P par 100 (car une pente de x est une pente de $x \times 100$ %). Cela permet « de se représenter » la dénivellation pour 100 mètres à l'horizontal.

<u>Exemple 1 :</u>

Sur une carte d'échelle 1÷25 000, la distance mesurée en ligne droite entre 2 points est de 8,3 cm alors que leur différence d'altitude est de 250 m.

<u>1° Distance horizontale réelle :</u>

$$8{,}3 \text{ cm} \div (1 \div 25000) = 8{,}3 \text{ cm} \div 0{,}000\,04 = 207\,500 \text{ cm} = 2\,070{,}5 \text{ m}$$

<u>2° Pente moyenne du terrain :</u>

$$P = \frac{250 \text{ m}}{2\,070{,}5 \text{ m}} \approx 0{,}120\,744 \approx 0{,}121 \approx \frac{12{,}1}{100} \approx 12{,}1\ \%$$

<u>Conclusion :</u>

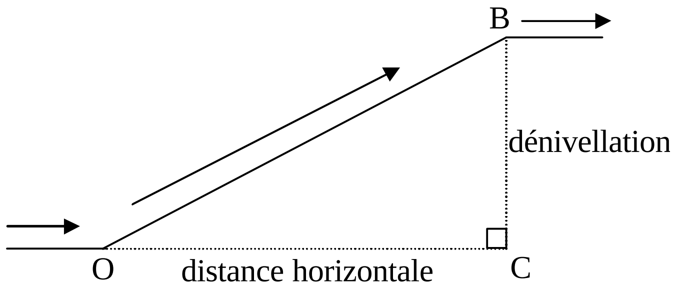
Sur ce terrain il y a une différence moyenne d'altitude de **12,1** m **pour 100** m horizontaux.

ATTENTION ! Les « ponts et chaussées » utilisent une autre définition basée sur le sinus de l'angle avec l'horizontal (qui correspond au quotient de la dénivellation par la distance parcourue) ce qui engendre de nombreuses confusions. C'est malheureusement cette définition qui apparaît dans les dictionnaires… Cet article se voulant conforme aux principes mathématiques, ce n'est pas cette définition qui est retenue.

2. Application mathématique

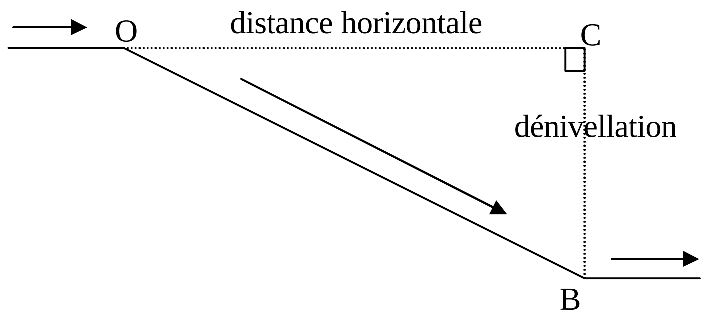
Dans un triangle OBC rectangle en C où l'horizontale est [OC], **la valeur absolue de la pente P de l'hypoténuse [OB] s'obtient donc en calculant le quotient $\mathbf{\frac{BC}{OC}}$** ; il suffit « d'adjoindre » le signe + lorsque le terrain est parcouru en montant, ou le signe – lorsqu'il est parcouru en descendant, pour obtenir la pente dite réelle (ce signe n'a, en fait, que peu d'importance car ce qui se descend à l'aller, se remonte au retour…).

Cas n°1 : parcours montant de O vers B



$$\boxed{\textbf{PENTE POSITIVE : } + \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{OC}}}$$

Cas n°2 : parcours descendant de O vers B



$$\boxed{\textbf{PENTE NÉGATIVE : } - \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{OC}}}$$

Lors de la détermination de la valeur absolue de la pente $\boxed{\mathbf{P = \frac{BC}{OC}}}$ le résultat obtenu est compris entre 0 et l'infini (∞). En effet, si [OB] est horizontal la dénivellation BC est nulle donc P = 0, alors que si [OB] est vertical la longueur horizontale OC est nulle et donc P = ∞.

En général il est aisé de mesurer la distance parcourue OB et la dénivellation BC. À titre d'information il est rappelé que la propriété de Pythagore permet de retrouver l'une des trois longueurs à partir des deux autres dans le triangle rectangle : $\boxed{\mathbf{OB = \sqrt{OC^2 + BC^2}}}$; et aussi $\boxed{\mathbf{OC = \sqrt{OB^2 - BC^2}}}$; $\boxed{\mathbf{BC = \sqrt{OB^2 - OC^2}}}$.

<u>Exemple 2 :</u>

> La distance horizontale entre deux points est de 2 070 m pour une différence d'altitude de 250 m.
>
> Ici, OC = 2 070 m et BC = 250 m ;
>
> Donc OB $= \sqrt{OC^2 + BC^2} = \sqrt{2\,070^2 + 250^2} = \sqrt{4\,284\,900 + 62\,500} = \sqrt{4\,347\,400}$
>
> $\approx 2\,085{,}0$
>
> <u>Conclusion :</u>
>
> Sur ce terrain la distance théorique parcourue « en pente » est de 2 085 m.

3. Détermination de l'angle correspondant

La pente n'est pas un angle… Néanmoins, elle est peu pratique à manipuler vu les valeurs qu'elle peut prendre (de 0 à l'infini). Elle peut être rapportée à un angle a (compris entre l'angle nul et l'angle droit) exprimé soit en degrés (unité de mesure d'angles usuelle et en usage dans le Système international d'unités, notée °) soit en grades (unité de mesure d'angles non reconnue par le Système international d'unités, notée officiellement gon) en utilisant, à l'aide d'une calculatrice, la fonction mathématique arctan car la pente est la tangente de l'angle d'où $\boxed{a = \arctan P}$ (et réciproquement $\boxed{P = \tan a}$; retour à la définition mathématique ou de la géomorphologie !).

Exemple 3 de valeurs « communes » :

L'angle nul de 0° (0 gon) correspond à une pente de 0 ou 0 % car tan(0°) = 0 ;
L'angle de 22,5° (25 gon) correspond à une pente de 0,414 ou 41,4 % car tan(22,5°) ≈ 0,414 ;
L'angle de 45° (50 gon) correspond à une pente de 1 ou 100 % car tan(45°) = 1 ;
L'angle de 67,5° (75 gon) correspond à une pente de 2,414 ou 241,4 % car tan(76,5°) ≈ 2,414 ;
L'angle droit de 90° (100 gon) correspond à une pente infinie ou ∞ %.

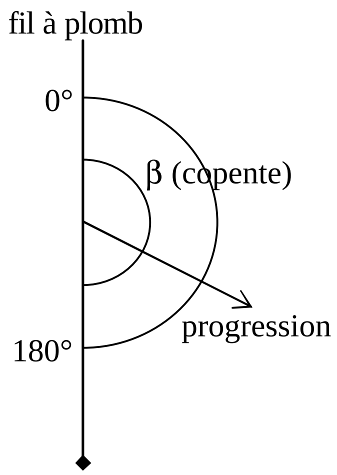
Par la suite le grade ne sera plus signalé puisque celui-ci n'est pas reconnu par le Système international d'unités.

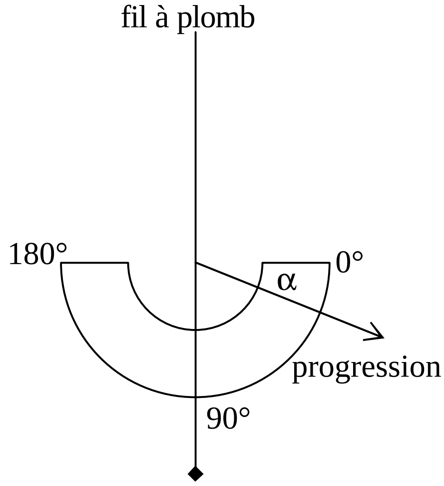
3. Mesure de pente sur le terrain

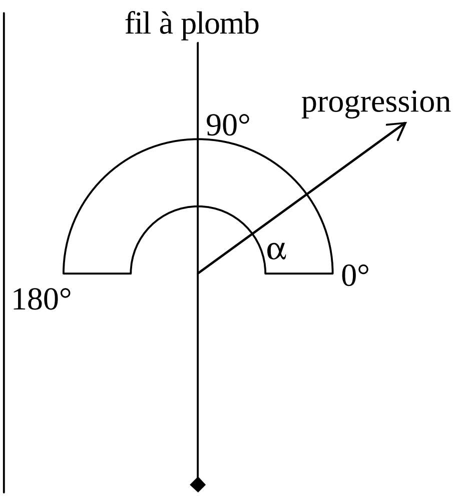
Il existe des appareils de mesure « tout fait » pour déterminer des pentes moyennes de terrain mais il est également possible de construire un appareil avec un fil à plomb et un rapporteur.

- Le **clinomètre** (« ***appareil indiquant l'inclinaison d'une ligne ou d'un plan par rapport à un plan horizontal*** », *Le Trésor de la Langue Française informatisé*) permet de lire directement une pente négative ou positive par visée. La lecture de la pente se fait en pourcentages mais aussi avec l'angle correspondant en degrés. L'appareil est précis et il n'y a qu'à reporter la valeur lue. Les informations lues sont d'ailleurs conformes aux principes exposés précédemment dans la partie 1 (i.e. pente de 100 % pour un angle de 45°).

- Le **rapporteur et le fil à plomb** permettent de mesurer l'angle correspondant à une pente. Ils sont d'utilisation plus complexe ; on peut soit aligner « le 0 et le 180 » du rapporteur sur le fil mais la valeur lue n'est pas l'angle correspondant à la pente (je l'appellerai ici la « copente » par analogie à la colatitude), soit aligner le centre du rapporteur et « le 90 » sur le fil et lire l'angle auquel il faudra penser à adjoindre le signe + pour une montée et – pour une descente.







La « copente » β, angle compris entre 0° et 180°, est lue sur le rapporteur. L’angle réel a de l’inclinaison est $\boxed{a\ \mathbf{= 90 -}\ b}$.

La valeur absolue de l’angle a correspondant à la pente, est directement lu sur le rapporteur. Pour obtenir l’angle réel correspondant à la pente dite réelle il suffit de préciser en adjoignant le signe + pour une montée et – pour une descente (ci-dessus : – à gauche et + à droite).

- Dans l’ouvrage *Techniques de la Spéléologie Alpine* (édition de 1986) les auteurs montrent au chapitre 2.3.1 l’utilisation de la TOPOCHAIX, appareil composé d’un fil à plomb et d’un rapporteur gradué de –90° à +90° ! Cette méthode peut être reproduite avec un rapporteur normal en considérant que l’angle correspondant à la pente sera alors égal à « angle lu – 90 » si « le 0 et le 180 » du rapporteur sont alignés avec le fil de relevé topographique, « le 0 » étant placé vers le sens de progression.

Dans le cadre d’une utilisation avec rapporteur il est fortement conseillé de privilégier un rapporteur semi-circulaire (angles de 0° à 180°) gradué dans les deux sens afin de pouvoir toujours considérer la « bonne » origine (0°) et d’éviter les rapporteurs circulaires (angles de 0° à 360°).

4. Méthodes de conversion des données pour une topographie

Pour tracer une topographie il est nécessaire de disposer de la valeur absolue de l’angle correspondant à la pente relevée (pour mémoire le signe + ne sert qu’à indiquer une montée et – une descente). Si le dessinateur ne dispose que de la valeur de la pente **P**, il faut commencer par déterminer la valeur de l’angle correspondant a en calculant $\boxed{a\ \mathbf{= arctan\ P}}$ (avec une calculatrice configurée en degrés ou à l’aide de tables préétablies).

Exemple 4 :

Une pente absolue de 12,1 % correspond à un angle α de 6,9° car arctan(12,1 ÷ 100) ≈ 6,9° ;

Une pente absolue de 3 % correspond à un angle α de 1,7° car arctan(3 ÷ 100) ≈ 1,7° ;

Une pente absolue de 254 % correspond à un angle α de 68,5° car arctan(254 ÷ 100) ≈ 68,5° ;

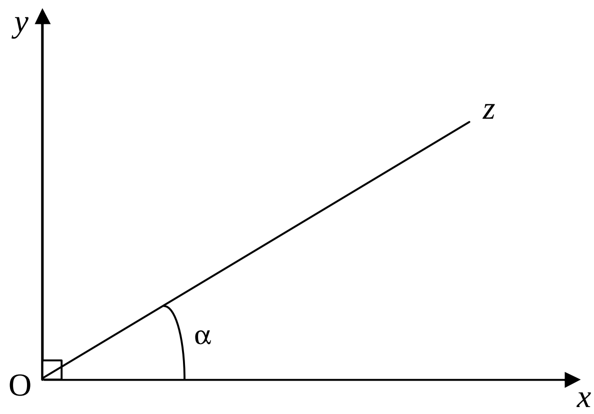
Inversement un angle de 18° correspond à une pente de 32,5 % car tan(18°) ≈ 0,325 ≈ 32,5 %.

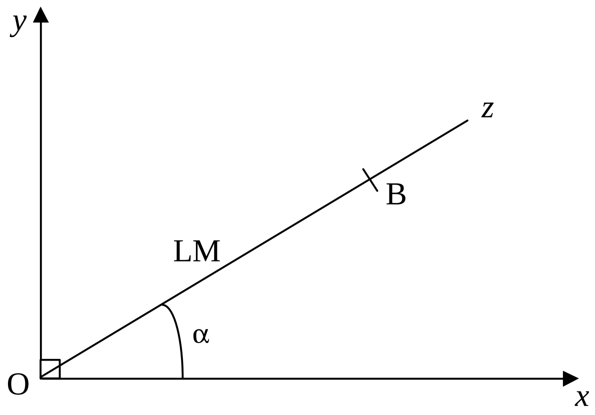
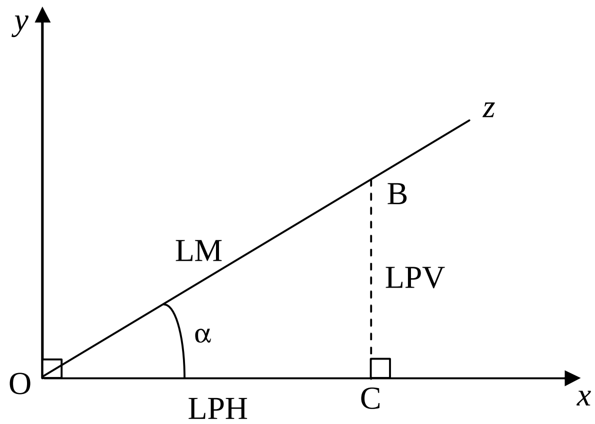
Si **LM** est la <u>Longueur Mesurée sur le terrain</u> (longueur OB dans la partie 1), **LPV** la <u>Longueur Projetée Verticale</u> (dénivellation BC dans la partie 1) et **LPH** la <u>Longueur Projetée Horizontale</u> (longueur à l'horizontale OC dans la partie 1) alors : $\boxed{\textbf{LPV = LM ´ sin a}}$ et $\boxed{\textbf{LPH = LM ´ cos a}}$.

<u>Exemple 5 :</u>

> Un relevé topographique donne un angle (correspondant à une pente) de –55° sur une pente linéaire de 30 m. Donc α = 55° et LM = 30 m d'où : LPV = 30 m × sin(55°) ≈ 24,57 m ;
>
> et : LPH = 30 m × cos(55°) ≈ 17,21 m.
>
> Ce qui signifie que pour une longueur horizontale de 17,21 m, le parcours <u>descend</u> de 24,57 m.
>
> *Mise sur plan à l'échelle 1 ¸500 : LM = 30 m ´ (1 ¸500) = 0,06 m = 6 cm ;*
>
> *LPV » 24,57 m ´ (1 ¸500) » 0,049 m » 4,9 cm ;*
>
> *LPH » 17,21 m ´ (1 ¸500) » 0,034 m » 3,4 cm.*

En l'absence de calculatrice pour effectuer les calculs il est possible de déterminer graphiquement LPV et LPH en traçant un triangle rectangle en suivant les étapes suivantes :

1) Tracer deux demi-droites perpendiculaires [O*x*) et [O*y*). 	2) Tracer une demi-droite [O*z*) telle que $\widehat{xOz}$ = α. 

3) Reporter la longueur LM à partir de O sur [O*z*) à l'échelle choisie (relire l'exemple 5) afin d'obtenir un segment [OB].  	4) Projeter orthogonalement B sur [O*x*) pour obtenir C : la Longueur Projetée Verticale LPV est BC et la Longueur Projetée Horizontale LPH est OC. 

Remarques :

Toutes les figures ont été tracées suivant les principes de Descartes, c'est-à-dire de la gauche vers la droite. En particulier, l'axe des abscisses [O*x*) est tracé « horizontalement vers la droite » et l'axe des ordonnées [O*y*) « verticalement vers le haut ».

L'usage des unités de mesures dans les calculs est conforme aux normes AFNOR en vigueur ainsi qu'aux « nouveaux » programmes d'enseignement des mathématiques au collège de 2004 (6^e) et 2005 (5^e et 4^e).

Glossaire mathématique :

Carré d'un nombre x : produit de ce nombre par lui-même, noté x^2. Par exemple, $2\,070^2 = 2\,070 \times 2\,070 = 4\,284\,900$.

Echelle e : quotient entre la distance sur la carte D_c et la distance réelle D_r exprimées dans la même unité de mesure. Elle est traditionnellement notée sous forme fractionnaire de numérateur 1. Les trois relations mathématiques sont : $\boxed{e = \frac{D_c}{D_r}}$; $\boxed{D_c = e \times D_r}$; $\boxed{D_r = \frac{D_c}{e}}$.

Fonctions trigonométriques : ce sont le sinus (noté sin), le cosinus (noté cos), et la tangente (notée tan). Elles nécessitent l'usage d'une calculatrice ou de tables de valeurs. Il en va de même pour leurs réciproques (arcsin, parfois asn ou $\sin^{-1}$; arccos, parfois acs ou $\cos^{-1}$; arctan, parfois atn ou $\tan^{-1}$).

Pourcentage : coefficient exprimé en centièmes. Par exemple, un coefficient de 0,50 s'écrit aussi $\frac{50}{100}$ ou 50 %.

Quotient : résultat de la division. Le quotient de a par b peut se noter indifféremment $\frac{a}{b}$ ou a / b ou $a \div b$.

Valeur absolue d'un nombre : valeur dépourvue de signe + ou –. Par exemple, la valeur absolue de –10 est 10.

Bibliographie :

La carte, lecture et utilisation, IGN, PARIS, 1988

Le Système international d'unités (SI), BIPM ; http://www1.bipm.org/fr/si

Le Trésor de la Langue Française informatisé, CNRS et université de Nancy 2 ; http://atilf.atilf.fr

Recueil de Normes Françaises : Mathématiques, AFNOR, PARIS, 1996

CHIRON , LINGER , RIGALDIE : *Information Topographie,* in : *Dossier Instruction EFS*, EFS, LYON, 1982

HOLVOET , LIMAGNE : *Orientation, étude de cartes,* in : *Dossier Instruction EFS,* EFS, LYON, 1986

MARBACH , ROCOURT : *Techniques de la Spéléologie Alpine*, *2e édition*, CHORANCHE, 1986

PROPHETE : *Topographie souterraine*, in : *Dossier Instruction EFS*, EFS, LYON, 1998